EXAMES DE ELECTROMAGNETISMO

Jaime E. Villate
Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto

5 de Fevereiro de 1999

Resumo

Este documento contém os exames da disciplina de física, dos cursos de engenharia química e engenharia informática e de computação, realizados durante os últimos dois anos. A disciplina de física é uma disciplina do primeiro semestre do segundo ano, destinada ao ensino do electromagnetismo.

1 Ano lectivo 1998-99

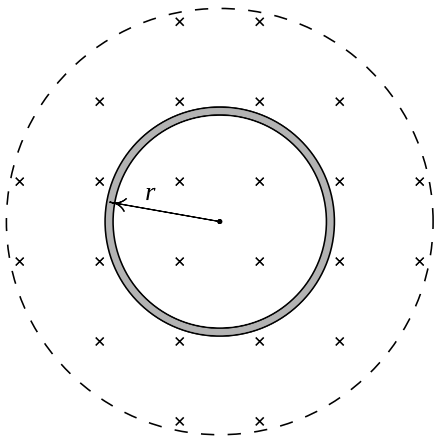
1.1 Exame do dia 29-1-99

Docentes: Jaime Villate e Inês Freitas
Duração: 2 horas
Com consulta de formulário. Pode responder a lápis e em qualquer ordem.

1. (3 valores) Represente as linhas de campo dos campos $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ e $\mathbf{G} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$, onde $\mathbf{r}$ é o vector posição. Demonstre que em qualquer ponto a divergência de $\mathbf{F}$ é igual a 3 e o rotacional de $\mathbf{G}$ é igual a $2\,\mathbf{k}$.

2. (4 valores) Dois condensadores de $10\ \mu\text{F}$ e $20\ \mu\text{F}$ são ligados em série a uma fonte de 1200 V. Calcule a carga em cada condensador. A fonte é logo desligada, ligando entre si os terminais dos condensadores que estavam em contacto com a fonte. Calcule a diferença de potencial e carga final em cada condensador.

3. (5 valores) No interior do círculo a tracejado na figura, existe um campo de indução magnética apontando para dentro do papel e com módulo igual a $0{,}6\,\mathrm{e}^{-t/15}$ (unidades SI, $t = \text{tempo}$). Calcule o módulo e direcção do campo eléctrico induzido dentro do anel condutor de raio $r = 9\,\text{cm}$.

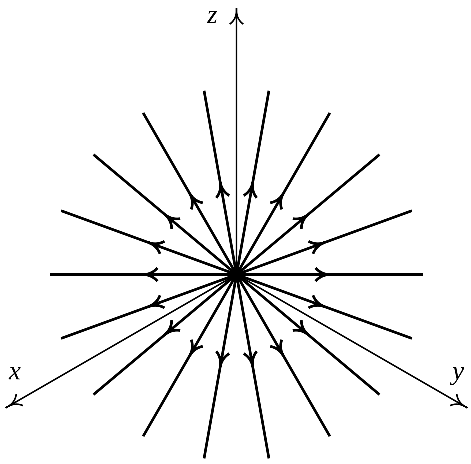


4. (4 valores) Quando três resistências idênticas são ligadas em paralelo a uma fonte de tensão, a potência total dissipada é $7,8$ W. Qual será a potência dissipada quando as três resistências forem ligadas em série à mesma fonte?

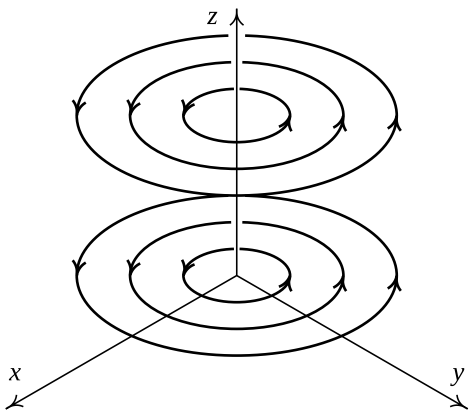
5. (4 valores) Um fio cilíndrico de cobre, de raio a, conduz uma corrente I. A corrente está distribuída de forma não-uniforme, com $J = Ar^3$, onde r é a distância até o eixo do fio e A uma constante. Calcule o campo de indução magnética $\mathbf{B}$ no interior e no exterior do fio, usando a lei de Ampère.

1.2 Resolução do exame do dia 29-1-99

1. As linhas de campo de $\mathbf{F}$ apontam na direcção radial e, portanto, o desenho das linhas de campo é:



Em qualquer ponto, o campo $\mathbf{G}$ é perpendicular ao versor $\mathbf{k}$ e ao versor radial; assim, $\mathbf{G}$ tem a mesma direcção e sentido que o versor $\mathbf{e}_\theta$ e as linhas de campo são circunferências paralelas ao plano xy, com centro no eixo dos z:



A divergência de $\mathbf{F}$ é:

$$\nabla\cdot(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k})=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

Em função das coordenadas cartesianas, o campo $\mathbf{G}$ é

$$\mathbf{G}=\mathbf{k}\times(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k})=x\,\mathbf{j}-y\,\mathbf{i}$$

e o seu rotacional é igual a

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial x}{\partial z}\,\mathbf{i}-\frac{\partial y}{\partial z}\,\mathbf{j}+\frac{\partial x}{\partial x}\,\mathbf{k}+\frac{\partial y}{\partial y}\,\mathbf{k}=2\,\mathbf{k}$$

2. A carga é igual nos dois condensadores, por estarem em série, e é igual à carga no condensador equivalente

$$Q = C_{\text{eq}} \Delta V$$

$$C_{\text{eq}} = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20}\ \mu\text{F} = \frac{20}{3}\ \mu\text{F} \quad \Longrightarrow \quad Q = 8\ \text{mC}$$

Após a fonte ter sido desligada e os condensadores ligados entre si, a diferença de potencial nos dois condensadores será igual e, portanto, a carga em cada um será directamente proporcional às suas capacidades:

$$Q_2 = 2Q_1$$

onde Q_1 e Q_2 são as cargas nos condensadores de $10\ \mu$F e $20\ \mu$F, respectivamente. Por conservação da carga, sabemos também que

$$Q_1 + Q_2 = 3Q_1 = 8\ \text{mC}$$

assim, as cargas finais são $Q_1 = 8/3$ mC e $Q_2 = 16/3$ mC.

3. Como o campo de indução magnética é uniforme e perpendicular ao plano do anel condutor, o fluxo através deste será:

$$\Phi = \int\!\!\int B\, \text{d}A = BA = 0{,}6\pi r^2\, \text{e}^{-t/15}$$

e a fem induzida é igual a

$$\mathcal{E} = -\frac{\text{d}\Phi}{\text{d}t} = \frac{\pi r^2}{25}\, \text{e}^{-t/15}$$

esta fem induzida é igual ao integral de linha do campo eléctrico induzido, ao longo do anel. Como o campo induzido tem módulo constante e segue a direcção tangente ao anel, o seu integral de linha ao longo do anel será

$$\mathcal{E} = 2\pi r E_{\text{i}}$$

comparando as duas equações anteriores, obtemos o módulo do campo eléctrico induzido

$$E_{\text{i}} = \frac{r}{50}\, \text{e}^{-t/15} = 0,0018\, \text{e}^{-t/15}$$

A a sua direcção, como já foi dito, é tangente ao anel. Para encontrar o sentido do campo eléctrico induzido, observamos que como o módulo de B diminui, a derivada do campo $\mathbf{B}$ aponta para fora da folha de papel. Segundo a lei de Lenz, o campo magnético induzido apontará para dentro da folha de papel, o que implica uma corrente e um campo eléctrico induzido no sentido horário.

4. A resistência equivalente a três resistências iguais, ligadas em paralelo, é igual a um terço de cada uma das resistências. E a resistência equivalente quando as três resistências são ligadas em série é três vezes maior que a resistência de cada uma delas. Assim, a resistência equivalente é 9 vezes maior no caso das resistências estarem ligadas em série. Como a potência dissipada numa resistência é igual a

$$P = \frac{\Delta V^2}{R}$$

e a diferença de potencial é constante (a fonte de tensão é a mesma), a potência dissipada é inversamente proporcional à resistência e, portanto, a potência dissipada nas resistências ligadas em série será 9 vezes menor que o valor inicial de $7,8$ W

$$P = \frac{7,8}{9}\ \text{W} = 0{,}8667\ \text{W}$$

5. Se escolhermos o eixo dos z sobre o eixo do cilindro (no sentido da corrente), e como a densidade de corrente depende unicamente da distância ao eixo, existe simetria cilíndrica e as linhas de indução magnética serão circunferências paralelas ao cilindro e com centro no eixo dos z (ver desenho das

linhas do campo $\mathbf{G}$ no problema 1). O integral de linha do campo $\mathbf{B}$, ao longo de uma linha de indução de raio r é

$$\oint_{\mathrm{C}} \mathbf{B} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{r} = B \int \,\mathrm{d}s = 2\pi r B$$

Usando a lei de Ampère, obtemos

$$\oint_{\mathrm{C}} \mathbf{B} \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{r} = 4\pi k_{\mathrm{m}} I_{\mathrm{C}} \ .$$

Comparando as duas equações concluímos que:

$$B = \frac{2k_{\mathrm{m}} I_{\mathrm{C}}}{r} \ .$$

Se r for menor que o raio do cilindro, a corrente através de C será:

$$I_{\mathrm{C}} = \int\int J \,\mathrm{d}A = A \int_0^{2\pi} \int_0^r r^4 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{5}\pi A r^5$$

Se r for maior que o raio do cilindro, o integral de J é no intervalo $0 \leq r \leq a$ e a corrente é igual a

$$I_{\mathrm{C}} = \frac{2}{5}\pi A a^5$$

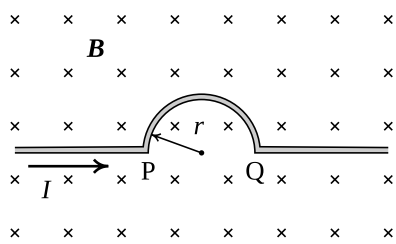
Assim, o campo será

$$B = \begin{cases} \dfrac{4k_{\mathrm{m}}\pi A a^5}{5r} & r \geq a \\[2ex] \dfrac{4k_{\mathrm{m}}\pi A r^4}{5} & r < a \end{cases}$$

1.3 Exame do dia 8-1-99

Docentes: Jaime Villate e Inês Freitas
Duração: 2 horas
Pode responder a lápis e em qualquer ordem. Com consulta do formulário.

1. (4 valores) O fio da figura transporta uma corrente $I = 5$ A e encontra-se dentro de um campo de indução magnética $B = 125$ G, uniforme e para dentro da folha de papel. Calcule a força magnética total sobre o arco PQ de raio $r = 3$ cm.



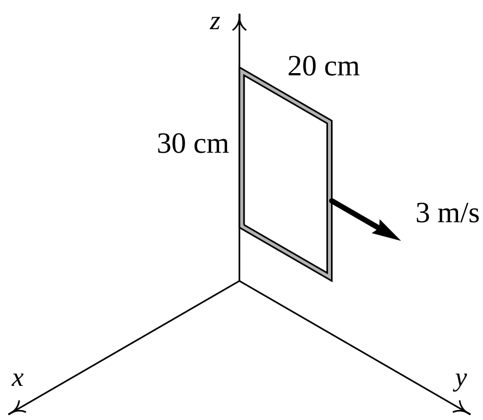
2. (4 valores) Uma esfera metálica isolada, de 1 m de raio tem uma carga inicial de 5×10^{-9} C. A esfera é ligada a outra esfera condutora isolada, de 30 cm de raio, inicialmente descarregada, por meio de um fio condutor. Calcule a carga em cada esfera, no estado de equilíbrio, desprezando a carga armazenada no fio e admitindo que as esferas estão bastante afastadas entre si.

3. (3 valores) Explique porque os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ de uma onda electromagnética plana, que se propaga no vazio na direcção do eixo dos y, não podem depender de x ou de z.

4. (5 valores) Uma espira condutora rectangular, paralela ao plano yz, desloca-se com velocidade uniforme $\mathbf{v} = 3\,\mathbf{j}$ (m/s) dentro de uma região onde existe um campo de indução magnética (unidades SI):

$$B_x = (6 - y) \qquad B_y = B_z = 0$$

Calcule a *fem* induzida na espira, em função do tempo t, a partir do instante $t = 0$ em que a espira se encontra na posição da figura.



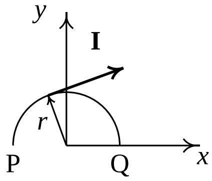
5. (4 valores) Calcule o campo eléctrico devido à distribuição de carga volúmica (unidades SI):

$$\rho(r, \theta, z) = \begin{cases} ar\ , & r \le b,\ -\infty < z < \infty \\ 0\ , & r > b,\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

onde (r, θ, z) são as coordenadas cilíndricas, e a e b são constantes.

1.4 Resolução do exame do dia 8-1-99

1. A força total é dada pelo integral
$$\mathbf{F} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \mathbf{I} \times \mathbf{B}\, \mathrm{d}s$$
Num ponto qualquer do arco, a corrente é tangente ao arco e podemos definir os eixos da seguinte forma:



assim, a corrente é no sentido oposto do versor $\mathbf{e}_\theta$
$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= -I\mathbf{e}_\theta \\
\mathbf{B} &= -B\,\mathbf{k} \\
\mathbf{I} \times \mathbf{B} &= = IB\mathbf{e}_r \\
ds &= -r d\theta \\
\mathbf{F} &= -rIB \int_\pi^0 \mathbf{e}_r d\theta
\end{aligned}$$
O versor radial depende do ângulo θ:
$$\mathbf{e}_r = \cos\,\theta\,\mathbf{i} + \sin\,\theta\,\mathbf{j}$$
$$\Longrightarrow\ \mathbf{F} = rIB\Big(- \sin\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\,\theta\,\mathbf{j}\Big)_\pi^0 = 2rIB\,\mathbf{j} = 0{,}0375\,\mathbf{j}\ (\mathrm{T})$$

2. A carga inicial Q_0 redistribui-se entre as duas esferas, ficando estas com cargas finais Q_1 e Q_2. Por conservação da carga, sabemos que
$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$
ligando as duas esferas com o fio condutor, o potencial nelas será idêntico ($V_1 = V_2$). Como o potencial na superfície de uma esfera é igual a kQ/r, obtemos a seguinte equação:
$$\frac{kQ_1}{r_1} = \frac{kQ_2}{r_2} \quad\Longrightarrow\quad Q_1 = \frac{r_1}{r_2}Q_2$$
substituindo na equação anterior, obtemos
$$Q_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2}Q_0 = 1{,}15 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}$$
e a carga na outra esfera é
$$Q_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2}Q_0 = 3{,}846 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}$$

3. Os campos de qualquer onda electromagnética no vazio são necessariamente perpendiculares entre si e perpendiculares à velocidade de propagação. Assim, num ponto P podemos definir os eixos x e y nas direcções de $\mathbf{B}$ e de $\mathbf{E}$, respectivamente
$$\mathbf{B} = B\,\mathbf{i} \qquad \mathbf{E} = E\,\mathbf{k}$$
além disso, sabemos também que $E = cB$. Usando a primeira e terceira equações de Maxwell:
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

obtemos

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

e substituindo a relação $E = cB$, obtemos

$$\frac{\partial B}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

Como as derivadas parciais dos campos em ordem a x e z são nulas, os campos não dependem de x ou de z no ponto P. Se a onda for plana, a velocidade em qualquer outro ponto será na mesma direcção e o argumento anterior também será válido.

4. Num instante $t > 0$, a espira estará localizada na posição (unidades SI):

$$\begin{aligned} 3t \quad &\le \quad y \le 3t + 0,2 \\ z_0 \quad &\le \quad z \le z_0 + 0,3 \end{aligned}$$

O fluxo através da espira é igual a

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{3t}^{3t+0,2} \int_{z_0}^{z_0+0,3} (6-y) dz\, dy \\ &= 0,3 \left(6y - \frac{y^2}{2} \right)_{3t}^{3t+0,2} = 0,36 + 0,15[9t^2 - (3t+0,2)^2] \end{aligned}$$

A *fem* induzida é:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = 2,7t - 0,9(3t + 0,2) = -0,18$$

No instante $t = 0$, o fluxo magnético é no sentido do versor $\mathbf{i}$ e diminui. Assim, o aumento do fluxo é no sentido oposto a $\mathbf{i}$ e a lei de Lenz implica que o sentido da *fem* induzida seja anti-horário, visto desde o lado esquerdo. Em qualquer instante $t > 0$, a *fem* induzida é $0,18$ V, no sentido anti-horário visto desde a esquerda.

5. Como a carga volúmica não depende de θ nem de z, existe simetria cilíndrica e o campo será na direcção radial. Qualquer cilindro com eixo sobre o eixo dos z é uma superfície gaussiana. Aplicando a lei de Gauss obtemos o módulo do campo eléctrico:

$$E = \frac{4\pi k q_i}{A}$$

onde q_i é a carga dentro do cilindro gaussiano e A é a área onde existe fluxo, que neste caso é a superfície curva do cilindro de raio r e comprimento L

$$A = 2\pi r L$$

portanto, o módulo do campo eléctrico é

$$E = \frac{2kq_i}{rL}$$

Para calcular a carga interna é preciso considerar dois casos:

(a) Pontos onde $r \le b$ (cilindro gaussiano com raio menor que b)

$$q_i = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r ar(r\, dr\, d\theta\, dz) = \frac{2}{3}\pi a L r^3$$

e o módulo do campo é

$$E = \frac{4}{3}\pi k a r^2$$

(b) Pontos onde $r \geq b$ (cilindro gaussiano com raio maior que b) .

$$q_i = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^b ar(r\,dr\,d\theta\,dz) = \frac{2}{3}\pi a L b^3$$

e o módulo do campo é

$$E = \frac{4\pi k a b^3}{3r}$$

2 Ano lectivo 1997-98

2.1 Exame do dia 16-1-98

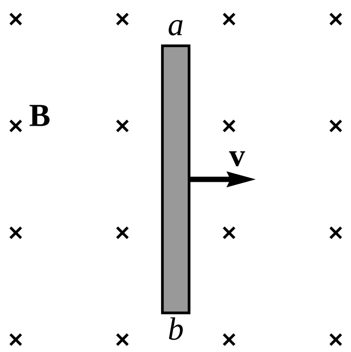
Docentes: Jaime Villate e Ana Paula Barbosa
Duração: 2 horas.
Pode responder em qualquer ordem e a lápis. Com consulta do formulário.

1. (3 valores) Considere uma onda electromagnética plana, polarizada linearmente na direcção do eixo dos x, que se propaga na direcção positiva do eixo dos y. A sua frequência é de 12 MHz e a sua amplitude é $E_o = 0,008$ V/m; (*a*) calcule o período e o comprimento de onda (*b*) escreva uma expressão para $\mathbf{E}(t)$ e para $\mathbf{B}(t)$.

2. (3 valores) A diferença de potencial entre os terminais de uma bateria é $4,5$ V quando a bateria é percorrida por uma corrente de 3 A, na direcção do terminal negativo para o positivo. Quando a corrente é de 2 A, na direcção oposta, a diferença de potencial aumenta até 12 V. (*a*) Calcule a resistência interna da bateria; (*b*) qual é a f.e.m. da bateria?

3. (4 valores) Calcula-se em geral a capacidade de um condensador plano desprezando os efeitos das bordas, isto é, supondo o campo interno uniforme e o campo externo nulo. Quando se consideram os efeitos de bordas, o valor exacto da capacidade é superior ou inferior a este valor aproximado? (justifique claramente a sua resposta).

4. (4 valores) Uma barra metálica de comprimento $l = 9$ cm desloca-se com velocidade uniforme $v = 18$ cm/s, dentro de um campo magnético uniforme $B = 3,5$ G, perpendicular à barra (ver figura). Calcule a diferença de potencial $V_a - V_b$.



5. (6 valores) Calcule o campo eléctrico produzido pela distribuição de carga (em unidades SI)

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{0,05}{r^2}\mathrm{e}^{-3r} & 0 \leq r \leq 0,1 \\ \\ 0 & 0,1 < r \end{cases}$$

2.2 Resolução do exame do dia 16-1-98

1. (a) O período é o inverso da frequência:

$$P = \frac{1}{12 \times 10^6 \mathrm{Hz}} = 8,33 \times 10^{-8}\ \mathrm{s}$$

E o comprimento de onda obtem-se a partir da frequência e da velocidade da luz

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{12 \times 10^6}\ \mathrm{m} = 25\,\mathrm{m}$$

(b) A onda é harmónica, já que a sua frequência está bem definida. Para uma onda harmónica, propagando-se na direcção positiva do eixo dos y, o campo eléctrico tem a forma:

$$E = E_o \cos(ky - \omega t + \delta)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0,2513\,\mathrm{m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 75,40\,\mathrm{MHz}$$

onde δ é uma constante de fase. A direcção do campo é a direcção de polarização:

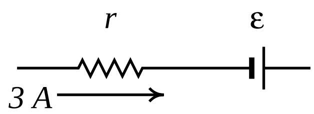
$$\mathbf{E} = 0,008 \cos(0,2513\,y - 75,40 \times 10^6 t + \delta)\,\mathbf{i}$$

(unidades SI). O campo magnético tem a direcção do produto vectorial entre a direcção de propagação ($\mathbf{j}$) e a direcção do campo eléctrico ($\mathbf{i}$ nos pontos onde a função co-seno for positiva), ou seja a direcção $-\mathbf{k}$. O seu módulo é igual ao módulo do campo eléctrico dividido por c:

$$\mathbf{B} = -\frac{0,008}{3 \times 10^8} \cos(0,2513\,y - 75,40 \times 10^6 t + \delta)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = -2,67 \times 10^{-11} \cos(0,2513\,y - 75,40 \times 10^6 t + \delta)\,\mathbf{k}$$

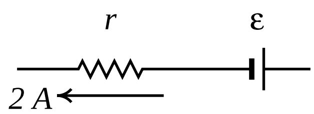
2. (a) No primeiro caso temos o seguinte diagrama de circuito



onde r é a resistência interna e $\mathcal{E}$ a f.e.m. A diferença de potencial entre os terminais da bateria é

$$\Delta V = \mathcal{E} - 3r = 4,5\,\mathrm{V}$$

(b) No segundo caso:



a diferença de potencial entre os terminais da bateria é agora

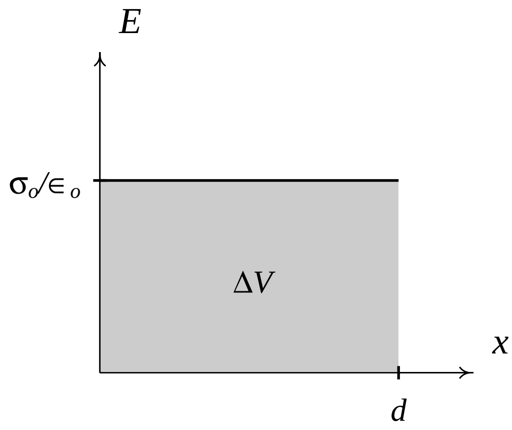
$$\Delta V = \mathcal{E} + 2r = 12\mathrm{V}$$

(no circuito repare que o sinal da diferença de potencial na f.e.m. e na resistência interna é o mesmo). Resolvendo as duas equações anteriores, encontramos os valores da f.e.m. e da resistência interna:

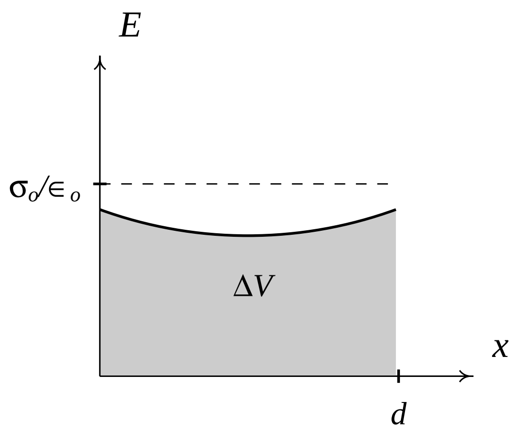
$$5r = 12 - 4,5 \qquad \Longrightarrow \qquad r = 1,5\Omega$$

$$\mathcal{E} = 3r + 4,5 = 9\mathrm{V}$$

3. Quando ignoramos os efeitos das bordas, admitimos que o campo eléctrico no condensador é constante, a densidade superficial de carga (σ_o) constante, e usando a lei de Gauss obtemos que $E = \sigma_o/\epsilon_o$. A diferença de potencial entre as armaduras é igual à área sob a curva do campo eléctrico:



em que x é a distância ao longo de uma linha de campo. A situação real, considerando efeitos das bordas, apresenta duas diferenças; por um lado, a medida que x aumenta, o campo diminui até $x = d/2$ e volta a aumentar, já que as linhas de campo afastam-se e voltam a juntarem-se. Por outro lado, a densidade superficial de carga já não é constante; acumulam-se mais cargas nas bordas e menos no centro. Existe ainda uma linha de campo perpendicular às armaduras (no centro) e ao longo dela o campo será na forma seguinte:



Consequentemente, a diferença de potencial diminui. A capacidade é dada por

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

a carga obviamente é constante (estamos ao olhar ao mesmo sistema numa forma mais realista) e portanto a capacidade é maior quando consideramos os efeitos das bordas.

4. Os electrões de condução vão sentir uma força magnética para baixo (regra da mão direita) de módulo

$$F_m = evB$$

Quando a barra atingir o equilíbrio electrostático, existirá um campo eléctrico para baixo, o qual produz uma força eléctrica para cima, sobre os electrões de condução, igual e oposta à força magnética

$$F_e = eE = evB \qquad \Longrightarrow \qquad E = vB$$

Como a força magnética sobre cada electrão é a mesma em qualquer ponto na barra, o campo eléctrico deverá ser constante e a diferença de potencial será

$$V_a - V_b = E d_{ab} = v B d_{ab} = (0,18)(0,09)(3,5 \times 10^{-4})\ \mathrm{V}$$

$$V_a - V_b = 5.67 \times 10^{-6}\ \mathrm{V}$$

5. A distribuição de carga tem simetria esférica já que só depende da distância à origem (r). Assim, podemos aplicar a lei de Gauss para calcular o campo eléctrico, já que qualquer esfera com centro na origem será uma superfície Gaussiana. O fluxo a través das esferas Gaussianas é

$$\phi = 4\pi r^2 E = 4\pi k q_i \qquad \Longrightarrow \qquad E = \frac{k q_i}{r^2}$$

onde q_i é a carga no interior da esfera de raio r, a qual calcula-se por integração da densidade de carga dentro do volume da esfera. Temos dois casos: quando r é menor que $0,1$

$$q_i = 4\pi \int_0^r \rho\, r^2 dr = 4\pi(0,05) \int_0^r e^{-3r} dr = 0,2094(1 - e^{-3r})$$

$$E = 1,88 \times 10^9 \frac{1 - e^{-3r}}{r^2}$$

Quando r é maior ou igual a $0,1$ temos

$$q_i = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr = 4\pi(0,05) \int_0^{0,1} e^{-3r} dr = 0,2094(1 - e^{-0,3})$$

$$E = \frac{4,89 \times 10^8}{r^2}$$

Nos dois casos o campo é na direcção radial.

2.3 Exame do dia 30-1-98

Docentes: Jaime Villate e Ana Paula Barbosa
Duração: 2 horas.
Pode responder em qualquer ordem e a lápis. O formulário encontra-se no outro lado desta folha.

1. O campo eléctrico numa região do espaço é igual a (unidades SI)

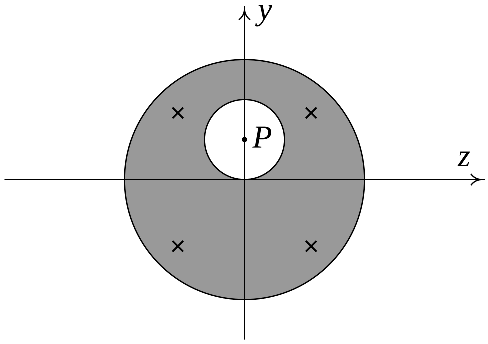
$$\mathbf{E} = 4xy\,\mathbf{i} + (2x^2 + 8yz^3)\,\mathbf{j} + 12y^2z^2\,\mathbf{k}$$

   (a) (2 valores) Demonstre que o campo $\mathbf{E}$ é conservativo.

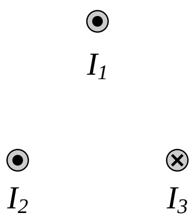
   (b) (3 valores) Calcule o potencial electrostático (defina $V = 0$ na origem).

   (c) (4 valores) Calcule a carga total dentro do cubo: $0 \le x \le 1\,cm$, $2\,cm \le y \le 3\,cm$ e $2\,cm \le z \le 3\,cm$.

2. (4 valores) A figura representa o corte transversal dum cilindro sólido, muito comprido, de raio $a = 9$ cm, que tem uma cavidade cilíndrica de raio $b = 3$ cm, como se mostra na figura. No cilindro flui uma corrente de densidade uniforme, $J = 21\ \mathrm{A/m^2}$. Calcule o campo magnético $\mathbf{B}$ no ponto P.



3. (3 valores) As correntes nos três fios na figura são $I_1 = 3$ A, $I_2 = 3$ A e $I_3 = 7$ A. Desenhe as linhas de campo magnético do sistema.



4. (4 valores) Se duas resistências forem ligadas em paralelo,

   (a) a resistência equivalente é superior à mais forte, intermédia entre a maior e a mais pequena ou inferior à mais fraca?

   (b) qual delas é atravessada pela corrente mais intensa?

   (c) nos terminais de qual a diferença de potencial é maior?

   (d) em qual é dissipada maior potência na forma de calor?

2.4 Resolução do exame do dia 30-1-98

1. (a) Para demonstrar que o campo é conservativo, basta demonstrar que as *derivadas cruzadas* das três componentes do campo são iguais:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 4x = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = 24yz^2 = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

(b) O potencial no ponto (x, y, z) é igual a menos o integral de linha desde a origem (onde arbitramos $V = 0$) até o ponto:

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= -\int_0^x E_x(x,0,0)\,dx - \int_0^y E_y(x,y,0)\,dy - \int_0^z E_z(x,y,z)\,dz \\ &= -\int_0^x 0\,dx - 2x^2\int_0^y dy - 12y^2\int_0^z z^2\,dz \\ &= -2yx^2 - 4y^2z^3 \end{aligned}$$

(c) A densidade de carga pode ser calculada a partir do campo eléctrico usando a forma diferencial da lei de Gauss

$$\begin{aligned} \rho &= \epsilon_o \nabla\cdot\mathbf{E} = \epsilon_o\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\ &= \epsilon_o\left(4y + 8z^3 + 24y^2z\right) \end{aligned}$$

e a carga dentro do cubo obtem-se integrando a densidade de carga dentro do cubo

$$\begin{aligned} q &= \epsilon_0\int_{0{,}02}^{0{,}03}\int_{0{,}02}^{0{,}03}\int_0^{0{,}01}\left(4y + 8z^3 + 24y^2z\right)\,dz\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{4\pi k}\Big[2\times10^{-4}(0,03^2 - 0,02^2) + 2\times10^{-4}(0,03^4 - 0,02^4) \\ &\quad +4\times10^{-2}(0,03^3 - 0,02^3)(0,03^2 - 0,02^2)\Big] \\ &= 8,89\times10^{-19}\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

(carga de aproximadamente 6 protões!).

2. A corrente no cilindro pode ser obtida por sobreposição de uma corrente uniforme num cilindro de raio a, com $J = 21\mathrm{A/m}^2$, mais outra corrente uniforme num cilindro de raio b, com $J = -21\mathrm{A/m}^2$. O campo magnético no ponto P calcula-se usando a lei de Ampère (a lei de Biot-Savart não pode ser usada por ser válida unicamente para fios unidimensionais). As linhas de campo produzidas por cada cilindro são círculos concêntricos com o respectivo cilindro e raio igual à distância entre o centro e o ponto P; assim para o cilindro de raio b o raio da linha de campo que passa por P é zero, e portanto a corrente interna I_c é também nula e o campo é zero. O campo total será só o campo produzido pelo cilindro de raio a a uma distância b desde o centro:

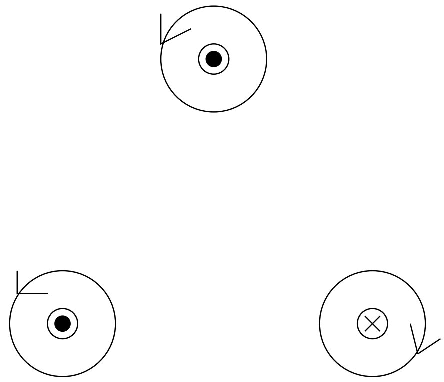
$$\int_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = 4\pi\,k_m I_c$$

$$2\pi\,bB = 4\pi k_m(\pi b^2 J)$$

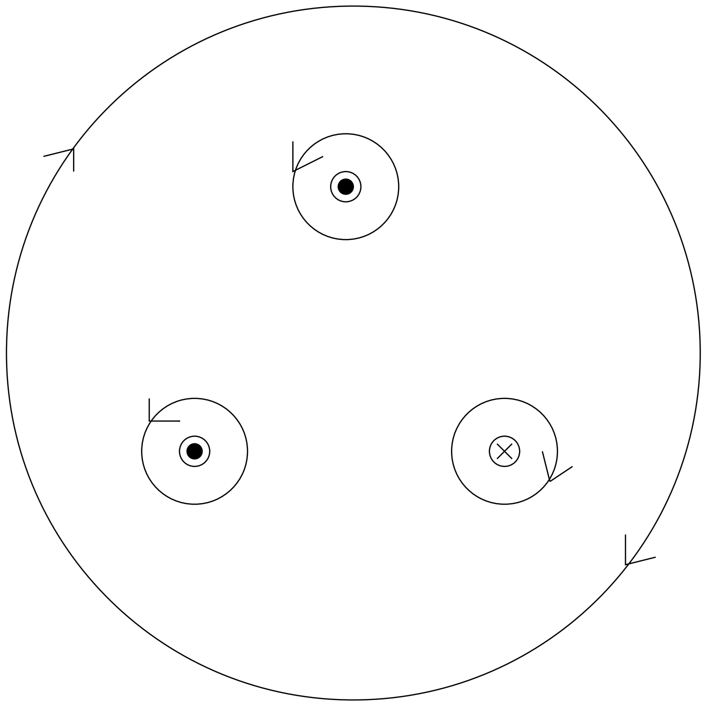
$$B = 2\pi\,bk_m J = 0,396\times10^{-6}\,\mathrm{T}$$

a direcção do campo obtem-se usando a regra da mão direita e segundo o desenho será a direcção do versor $\mathbf{k}$.

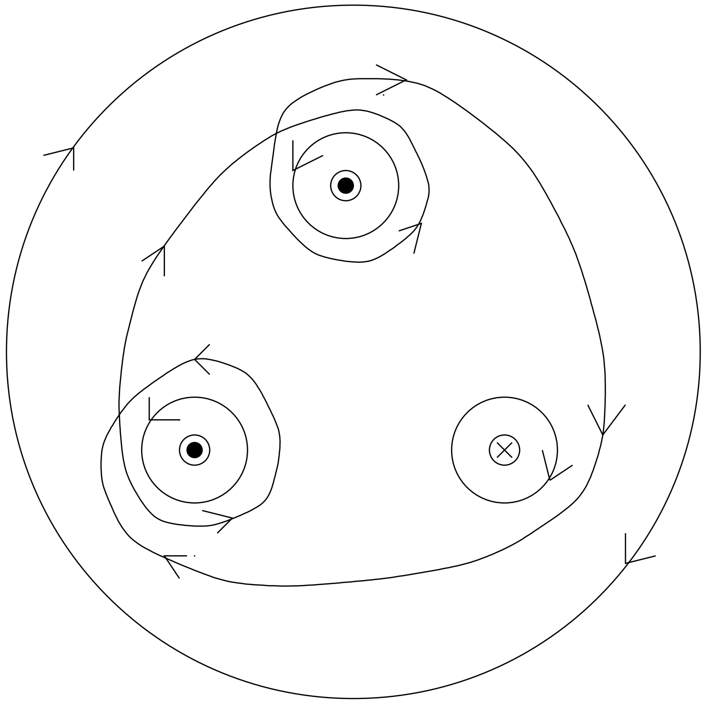
3. Perto de cada fio, o campo vai ser aproximadamente igual ao campo produzido pelo respectivo fio, e portanto as linhas de campo serão círculos orientados segundo a regra da mão direita:



a corrente total é (7 - 3 - 3) A = 1 A, para dentro da folha; vistos de longe, os três fios vão parecer um só fio com corrente de 1 A para dentro, cujas linhas de campo correspondem a círculos orientados no sentido horário:



finalmente, observamos regiões onde a direcção do campo sofre uma inversão, onde deverão necessariamente existir pontos de campo nulo, ou seja pontos onde as linhas de campo *aparentemente* se cruzam:



4. (a) O inverso da resistência equivalente é

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

como $1/R_1$ e $1/R_2$ são números positivos, temos que

$$\frac{1}{R} > \frac{1}{R_1} \qquad \frac{1}{R} > \frac{1}{R_2}$$

e como as resistências são números positivos

$$R < R_1 \qquad R < R_2$$

a resistência equivalente é menor que a resistência mais fraca (menor que as duas resistências).

(b) A diferença de potencial de duas resistências em paralelo é a mesma pela própria definição de resistências em paralelo. Usando a lei de Ohm temos que

$$\Delta V = I_1 R_1 = I_2 R_2$$

e concluímos que a resistência menor deverá ser atravessada pela corrente maior, para que o produto IR seja constante.

(c) Como já foi dito na alínea anterior, a diferença de potencial é a mesma nas duas resistências.

(d) A potência dissipada em cada resistência é

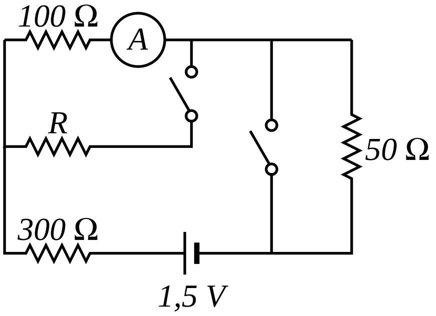
$$P_i = \Delta V I_i = \frac{\Delta V^2}{R_i}$$

como a diferença de potencial é a mesma nas duas resistências, a resistência que dissipa maior potência será a menor das duas.

2.5 Exame do dia 13-2-98

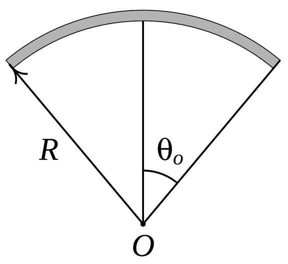
Docentes: Jaime Villate e Ana Paula Barbosa
Duração: 2 horas.
Pode responder em qualquer ordem e a lápis. O formulário encontra-se no outro lado desta folha.

1. (4 valores) No circuito que aparece na figura, a leitura do amperímetro é a mesma quando os dois interruptores estão abertos e quando os dois estão fechados. Calcule a resistência R.



2. (4 valores) Um condutor esférico oco tem raio interno a e externo b. Uma carga pontual positiva q está no centro da esfera e o condutor está descarregado. Calcule o potencial $V(r)$ em todos os pontos, admitindo que $V = 0$ em $r = \infty$, e desenhe o gráfico de $V(r)$.

3. (5 valores) Um fio condutor fino tem uma densidade linear de carga uniforme λ e está encurvado formando um arco circular que subtende um ângulo $2\theta_o$, conforme mostra a figura. Mostre que o campo eléctrico no ponto O tem módulo $E = (2k\lambda \, \sin \, \theta_o)/R$.



4. (4 valores) Uma espira quadrada de cobre, com 4 cm de lado encontra-se sobre a superfície horizontal de uma mesa. Um electroíman está colocado por cima da mesa, com o seu pólo norte um pouco acima e à esquerda da espira, de maneira que o campo magnético é aproximadamente uniforme e aponta para baixo através da espira, formando um ângulo de 30° com a vertical. Calcule a *fem* média induzida na espira a medida que o campo magnético varia desde zero até o seu valor final de 0.5 T, em 200 ms. Qual será a direcção da corrente induzida?

5. (3 valores) Defina: onda plana, onda polarizada e onda harmónica.