Dez mandamentos para professores(*)

George Pólya

Apresentação do autor por Elon Lages Lima

George Pólya (1887 + 98 = 1985) nasceu em Budapest, Hungria, foi professor em Zurich de 1914 a 1940 e depois em Stanford, Estados Unidos, onde se aposentou em 1953 mas continuou ativo até praticamente sua morte, quase centenário. Pólya foi co-autor de um notável livro,escrito juntamente com seu compatriota Gabor Szegö, intitulado "Aufgaben und Lehrsãtze aus der Analysis" (Berlim, 1924) depois traduzido para o inglês com o título "Problems and Theorems in Analysis" (Berlim, 1972). Neste texto, em dois alentados volumes, os autores mostram como o ensino da Análise Matemática pode ser gradativamente desenvolvido, dos fundamentos até algumas fronteiras do conhecimento, através de uma judiciosa sequência de exercícios e problemas, alguns dotados de suprema elegância.

Pólya escreveu outros livros e inúmeros artigos originais, que lhe deram sólida reputação em Análise Clássica, Combinatória e Probabilidades. Suas obras completas, em 4 volumes, foram publicadas em 1984 pela MIT Press. Nos últimos quarenta anos de sua longa carreira, passou a interessar-se pelo ensino da Matemática, dedicando-se quase inteiramente ao estudo das questões referentes à transmissão do conhecimento matemático. Aesserespeito escreveu muitos artigos e alguns livros extraordinários, como "How to Solve It" (traduzido para o português como "A Arte de Resolver Problemas"), "Mathematics and Plausible Reasoning" (Princeton Univ. Press, 1954) e "Mathematical Discovery" (2 vols., Wiley, 1962 e 1965).

O trabalho de Pólya sobre o ensino da Matemática é maravilhoso simplesmente porque não propõe truques, fórmulas miraculosas, ou muito menos pom-

{*) Artigo publicado no "Journal of Educatíon", University of British Columbia, Vancouver and Victoria (3) 1959, p. 61-69, Reproduzido nos "Collected Papers" de George Polya, vol. IV, pp. 525-533, MIT Press 1984.
Traduzido por Maria Celano Maia.

posas teorias pseudo-psicológicas. O artigo que reproduzimos a seguir, de uma espontaneidade e de uma franqueza quase rudes, resume suas ideias de modo bastante claro.

Após anos de experiência como matemático de grande destaque e professor universalmente reconhecido por seus dotes de mestre, Pólya sintetiza suas conclusões em dez mandamentos e uma regra muito simples para treinar professores que saibam seguir esses mandamentos.

Para ser um bom professor de Matemática, você tem que vibrar com a sua matéria, conhecer bem o que vai ensinar, ter um bom relacionamento com os alunos para entender os problemas deles e dar a esses alunos a oportunidade de (pelo menos algumas vezes) descobrir as coisas por si mesmos. Deve ainda entender que "know-how" é mais importante do que informação. (Pólya lhe dirá no texto o que entende por "know-how".) E, para treinar professores a fim de que possam cumprir sua tarefa, o melhor a fazer é praticar com eles a arte de resolver problemas. Estou certo de que a leitura do artigo que se segue e, mais ainda, a releitura seguidas vezes, a meditação sobre o mesmo e a adoção dos princípios nele expostos, muito contribuirão para melhorar a qualidade das nossas aulas de Matemática.

Dez mandamentos para professores

Nos últimos cinco períodos letivos, todas as minhas aulas foram dirigidas a professores secundários que, após alguns anos de prática, voltaram à Universidade para mais treinamento. Eles desejavam, segundo entendi, um curso que fosse de uso prático imediato nas suas tarefas diárias. Tentei planejar um tal curso no qual, inevitavelmente, eu teria de expressar repetidas vezes minhas opiniões sobre o dia-a-dia do professor. Meus comentários foram aos poucos assumindo uma forma condensada e finalmente fui levado a enunciá-los como dez *regras*, ou *mandamentos.*

Para tornar claro o significado dos *mandamentos* deveria ter acrescentado exemplos ilustrativos mas, em vista da exiguidade de espaço, isso ficou fora de cogitação. Alguns pontos são ilustrados em meus livros (1) e (2), e outros serão discutidos noutro livro ao qual este artigo, ou seu conteúdo sob outra forma, será incorporado.

Dez mandamentos para professores

1. Tenha interesse por sua matéria.
2. Conheça sua matéria.

3. Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles.
4. Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.
5. Dê aos seus alunos não apenas informação, mas *know-how,* atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.
6. Faça-os aprender a dar palpites.
7. Faça-os aprender a demonstrar.
8. Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão — procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta.
9. Não desvende o segredo de uma vez — deixe os alunos darem palpites antes — deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível.
10. Sugira; não os faça engolir à força.

Comentários

Ao formular os *mandamentos,* ou *regras,* acima, tive em mente os participantes das minhas classes, professores secundários de Matemática. Entretanto, essas regras se aplicam a qualquer situação de ensino, a qualquer matéria ensinada em qualquer nível. Todavia, o professor de Matemática tem mais e melhores oportunidades de aplicar algumas delas do que o professor de outras matérias.

Vamos agora considerar as dez regras, uma por uma, prestando atenção especial à tarefa do professor de Matemática.

Tenha interesse por sua matéria.
Conheça a sua matéria.

1. É muito difícil prever com segurança o sucesso ou fracasso de um método de ensino. Mas há uma exceção: você aborrecerá a audiência com sua matéria se esta-matéria o aborrece.

Isto deve ser suficiente para tornar evidente o primeiro e principal dos mandamentos do professor: *Tenha interesse por sua matéria.*

2. Se um assunto não interessa ao professor, ele não será capaz de ensiná-lo aceitavelmente. Interesse é *sine qua non,* uma condição indispensavelmente necessária, mas, em si mesma, não é uma condição suficiente. Nenhuma quantidade de interesse, ou de métodos de ensino, permitirá que você explique claramente um ponto a seus alunos se você próprio não entender mais claramente ainda esse ponto.

O argumento acima deve ser bastante para tornar claro o segundo mandamento para professores: *Conheça a sua matéria.*

3. Mesmo com algum conhecimento e interesse, você pode ser um professor ruim ou bem medíocre. O caso não é muito comum, admito, mas tampouco é raro: muitos de nós conheceram professores que sabiam suas matérias mas não eram capazes de estabelecer *contacto* com os seus alunos.

Procure ler o semblante dos seus alunos.
...ponha-se no lugar deles.

Para que o ensinar, por parte de um, resulte no aprender, por parte de outro, deve haver uma espécie de contacto ou conexão entre professor e aluno: o professor deve ser capaz de perceber a posição do aluno; ele deve ser capaz de assumir a causa do aluno. Daí o próximo mandamento: *Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles.*

4. As três regras anteriores contêm a essência do bom ensino; elas formam, juntas, uma espécie de condição necessária e suficiente. Se você tem interesse e conhecimento, e é capaz de perceber o ponto de vista do aluno, você já é um bom professor ou logo se tornará um; só precisa de experiência.

Experiência é necessário, experiência prática, para pô-lo a par das interações entre professor e alunos na sala de aula, e para familiarizá-lo, tão intimamente e pessoalmente quanto possível, com o *processo de aquisição de novas informações e habilidades* — um processo que *tem muitos* e vários aspectos: aprendizagem, descoberta, invenção e compreensão... Os psicólogos fizeram trabalhos experimentais muito importantes e emitiram algumas opiniões teóricas interessantes sobre o processo de aprendizagem. Tais experiências e opiniões podem servir como uma base estimulante para uni professor excepcionalmente receptivo, mas elas ainda não amadureceram suficientemente (e não amadurecerão por um bom tempo, temo eu) para ser de uso imediatamente prático naquelas fases da instrução que nos concernem aqui. Em seu trabalho diário, o professor deve basear-se, primeiro e antes de tudo, na sua própria experiência e no seu próprio julgamento.

Baseando-me em meio século de experiência em pesquisa e ensino, e de reflexão muito cuidadosa, apresento aqui, para consideração do leitor, alguns pontos sobre o processo de aprendizagem, os quais eu considero como os mais importantes para uso em sala de aula.

Já se disse repetidas vezes que a aprendizagem *ativa* é preferível à aprendizagem *passiva,* meramente receptiva. Quanto mais ativa, melhor é a aprendizagem: *Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.*

De fato, numa situação ideal, o professor seria somente uma espécie de parteira espiritual; ele daria oportunidade aos alunos de descobrirem por si mesmos as coisas a serem aprendidas. Este ideal é dificilmente alcançado na prática, sobretudo por falta de tempo. Contudo, mesmo um ideal inatingível pode guiar-nos indicando a direção correta — ninguém ainda atingiu a Estrela Polar, mas muitas pessoas encontraram o rumo certo guiando-se por ela.

5. O conhecimento consiste em parte de *informação* e em parte de *know-how. Know-how* é destreza; é a habilidade em lidar com informações, usá-las para um dado propósito; *know-how* pode ser descrito como um apanhado de atitudes mentais apropriadas, *know-how* é em última análise a habilidade para trabalhar metodicamente.

Em Matemática, *know-how* é a habilidade para resolver problemas, construir demonstrações, e examinar criticamente soluções e demonstrações. E, em Matemática, *know-how* é muito mais importante do que a mera posse de informações.

Portanto, o mandamento seguinte é de especial importância para o professor de Matemática: *Dê aos seus alunos não apenas informações, mas know-how, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.*

Já que *know-how* é mais importante em Matemática do que informação, a maneira como você ensina pode ser mais importante nas aulas de Matemática do que aquilo que você ensina.

Faça-os aprender a dar palpites.
Faça-os aprender a demonstrar.

6. Primeiro conjecture, depois prove — assim procede a descoberta na maioria dos casos. Você deveria saber disto (pela sua própria experiência, se possível) e deveria saber, também, que o professor de Matemática tem excelentes oportunidades de mostrar o papel da conjectura no processo de descoberta e assim imprimir em seus alunos uma atitude mental fundamentalmente importante. Este último ponto não é tão amplamente conhecido como deveria ser e, infelizmente, o espaço aqui disponível é insuficiente para discuti-lo em detalhes (2). Ainda assim, desejo que você insista com seus alunos a respeito. *Faça-os aprender a dar palpites.*

Alunos ignorantes e descuidados provavelmente vão dar palpites rudimentares. Os palpites que nós queremos estimular, naturalmente; não são os rudimentares, mas os educados, os razoáveis. Palpites razoáveis baseiam-se no uso judicioso de evidência indutiva da analogia, e englobam em última análise todos os procedimentos do *raciocínio plausível* que desempenham um papel no método científico (2).

7. "A Matemática é uma boa escola de raciocínio plausível". Esta afirmativa resume a opinião subjacente à regra anterior; ela soa incomum e é de origem muito recente; na realidade, o autor do presente artigo reivindica seu crédito.

"A Matemática é uma boa escola para o raciocínio demonstrativo". Esta afirmativa soa bem familiar — algumas formas dela são provavelmente quase tão velhas quanto a própria Matemática. De fato, muito mais é verdade; Matemática tem quase o mesmo significado que raciocínio demonstrativo, o qual está presente nas Ciências na medida em que os seus conceitos se elevam a um nível lógico-matemático suficientemente abstrato e definido. Abaixo deste alto nível, não há lugar para raciocínio verdadeiramente demonstrativo (o qual não tem lugar, por exemplo, nas tarefas do dia-a-dia). Ainda assim (é desnecessário discutir-se tal ponto, tão amplamente aceito) os professores de Matemática devem colocar os seus alunos, salvo os das classes mais elementares, em contato com o raciocínio demonstrativo: *Faça-os aprender a demonstrar.*

8. *Know-how* é a parte mais valiosa do conhecimento matemático, muito mais valiosa que a mera posse de informação. Mas como devemos ensinar *know-howt* Os alunos só podem aprendê-lo através de imitação e prática.

Quando você apresentar a solução de um problema, *enfatize* convenientemente os *aspectos instrutivos* da solução. Um aspecto é instrutivo se merece imitação; isto é, se puder ser usado não somente na solução do presente problema, mas também na solução de outros problemas — quanto mais puder ser usado, mais instrutivo. Enfatize os aspectos instrutivos não somente louvando-os (o que poderia causar efeito contrário em alguns alunos) mas através de seu *comportamento* (um pouco de dramatização é muito bom se você tiver uma pontinha de talento teatral). Um aspecto bem enfatizado pode converter a sua solução numa *solução modelo,* num *padrão* marcante; imitando-o, os alunos resolverão muitos outros problemas. Daí a regra: *Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão — procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta* (1).

...deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível.
...não os faça engolir à força.

9. Eu gostaria de indicar aqui um pequeno truque que é fácil de aprender e que todo professor deveria conhecer. Quando você começar a discutir um problema, deixe que seus alunos adivinhem a solução. O aluno que concebeu um palpite, ou mesmo que tenha anunciado seu palpite, empenha-se: ele tem que seguir o desenvolvimento da solução para ver se o seu palpite estava certo ou não. Ele não pode permanecer desatento.

Este é um caso muito especial da regra seguinte, que tem pontos em comum com as regras 4 e 6: *Não desvende o segredo de uma vez — deixe os alunos darem palpites antes — deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível.*

10. Um aluno apresenta um longo cálculo que ocupa várias linhas. Olhando para a última linha, vejo que o cálculo está errado, mas me abstenho de dizer isso. Prefiro acompanhar o cálculo com o aluno, linha por linha: "Você começou bem; sua primeira linha está correta. A linha seguinte também está

correta, você fez isto e aquilo. A próxima linha está boa. Agora, o que você acha desta linha?" O engano está naquela linha e, se o aluno descobre o erro por si mesmo, ele tem uma chance de aprender algo. Se, no entanto, digo logo "Isto está errado", o aluno poderá se ofender e aí não ouvirá o que eu possa dizer depois. E se digo "Isto está errado" a todo instante, o aluno poderá odiar a mim e à Matemática, e todos os meus esforços estarão perdidos em relação a ele.

Evite dizer "Você está errado". Em vez disso, se possível, diga: "Você está certo, mas..." Se você procede assim, você não é hipócrita, você é somente humano. Que você deve proceder assim, está implicitamente contido na regra 4. Assim, nós podemos tornar o conselho mais explícito: *Sugira; não os faça engolir à força.*

Sobre o currículo para futuros professores

Os mandamentos acima são simples e bastante óbvios, mas nem sempre é fácil segui-los no dia-a-dia. E nós também, nem sempre tornamos fácil para os professores segui-los. Por exemplo, os estudos universitários do professor ajudam-no muito pouco a obedecer a estes mandamentos.

E assim chegamos à questão penosa do currículo para futuros professores de escola secundária. Eu não tenho espaço, tempo, meios (ou coragem) suficientes, ao meu dispor para tratar desta questão adequadamente. Entretanto há alguns pontos que não posso omitir. Todos eies têm relação com professores de Matemática que ensinam Álgebra, Geometria ou Trigonometria (muito raramente alguma matéria mais avançada) numa escola secundária. Não estou preocupado com "Matemáticas gerais" ou assuntos desse tipo nos quais há uma porção de generalidades, mas muito pouca Matemática.

Não posso deixar de citar uma frase que ouvi de um participante de minhas aulas: "O futuro professor não é bem tratado pelo Departamento de Matemática nem pelo Departamento de Educação. O Departamento de Matemática nos oferece bife duro de roer e o Departamento de Educação, sopa rala sem nenhuma carne". Encontrei vários professores que expressaram a mesma opinião, talvez de modo mais tímido e menos contundente. Quais as origens dessas opiniões?

Todo mundo conhece casos em que a Álgebra ou Geometria são ensinadas por um professor que conhece menos do assunto do que se supõe que ele deveria exigir de seus alunos. E isto pode até acontecer se o instrutor em questão não é o professor particular nem o professor de economia doméstica, mas o professor de Matemática. Quão excepcionais ou difundidos são tais casos, eu não gostaria de discutir.

Acontece também, mais frequentemente do que seria de se desejar, que um professor de Matemática capaz e bem intencionado não conheça bastante o *background* da Matemática de nível secundário para satisfazer a curiosidade, ou ao menos entender as reações, dos seus melhores alunos. (Alguns pontos que deveriam ser, mas não são, geralmente conhecidos: decimais infinitas, números irracionais, divisibilidade, primeiras provas de Geometria sólida.) Por que isto acontece?

O futuro professor deixa a escola secundária, muito frequentemente, sem nenhum conhecimento ou com um conhecimento hesitante da Matemática de nível secundário. Onde e quando ele deveria aprender a Matemática de nível secundário?

Ele segue um curso oferecido pelo Departamento de Matemática sobre tópicos mais avançados. Ele tem muita dificuldade de adaptar-se e de ser aprovado no curso, porque o seu conhecimento de Matemática de nível secundário é inadequado. Ele não consegue relacionar o curso com a sua Matemática de nível secundário. Por outro lado, ele recebe um curso oferecido pelo Departamento de Educação sobre métodos de ensino. Este é oferecido de acordo com o princípio de que o Departamento de Educação ensina somente métodos, não conteúdo. Nosso futuro professor pode ficar com a impressão errônea de que os métodos de ensino estão essencialmente relacionados com conhecimento inadequado, ou ignorância do conteúdo. De qualquer forma, seu conhecimento da Matemática de nível secundário permanece marginalizado.

Chego, agora, a um ponto que toca mais de perto o meu coração. O professor é exortado a fazer muitas coisas bonitas: ele deve dar a seus alunos não só informações mas *know-how*, ele deve encorajar sua originalidade e trabalho criativo, ele deve fazê-los experimentar a tensão e o triunfo da descoberta. Mas, e o professor, ele próprio? Há em seu currículo alguma oportunidade de trabalho independente em Matemática, de adquirir o *know-how* que se espera que ele transmita a seus alunos? A resposta é não. Tanto quanto eu saiba, não há Universidade que dê ao professor oportunidade decente de desenvolver seu *know-how,* sua própria habilidade em Matemática.

Alguns pontos que deveriam ser, mas não são, geralmente conhecidos: decimais infinitas, números irracionais, divisibilidade, primeiras provas de Geometria sólida.
Onde e guando ele deveria aprender a Matemática de nível secundário?
...um seminário sobre resolução de problemas para professores

Eu reivindico o crédito por haver introduzido o remédio mais óbvio para esses defeitos mais óbvios ainda: *um seminário sobre resolução de problemas* para professores, onde o conhecimento requerido é de nível secundário e o grau de dificuldade dos problemas a serem resolvidos é apenas um pouco acima do nível da escola secundária.

Um tal seminário pode ter, se dirigido adequadamente, vários efeitos bons (3). Em primeiro lugar, os participantes têm uma oportunidade de adquirir um *conhecimento sólido da Matemática de nível secundário* — conhecimento real, pronto para ser usado, não adquirido por mera memorização mas através de aplicação em problemas interessantes. Então o participante pode adquirir algum *know-how;* certa habilidade em lidar com Matemática de nível secundário; algum discernimento da essência da resolução de problemas.

Além disso, eu usei meu seminário para dar aos participantes alguma prática em explicar problemas e dirigir suas soluções, na verdade, uma oportunidade para/?raí/c<z *de ensino,* para a qual, na maioria dos currículos usuais, não há bastantes oportunidades. Isto é feito da seguinte maneira: ao começar uma aula prática, cada participante recebe um problema diferente (somente um para cada) o qual espera-se que ele resolva naquela aula; ele não deve comunicar-se com seus companheiros, mas poderá receber alguma ajuda de seu instrutor.

Entre essa aula e a seguinte, cada participante deve completar, rever e, se possível, simplificar sua solução, procurar alguma outra abordagem para a solução, e assim por diante. Ele deve também, fazer um plano de aula para apresentar seu problema e sua solução para uma classe. Ele pode consultar o instrutor sobre qualquer dos pontos acima. Então, na aula prática seguinte, os participantes formam *grupos de discussão',* cada grupo composto de 4 membros selecionados, tanto quanto possível, de acordo com as suas afinidades. Um membro assume o papel do professor e três outros o papel dos alunos. O professor apresenta o seu problema aos alunos e tenta guiá-los para a solução, de acordo com a regra 9 e os outros mandamentos. Quando a solução for obtida, segue-se uma pequena crítica amistosa. Depois, outro membro toma o lugar do professor, apresenta o seu problema; e o procedimento se repete até que todos tenham tido sua vez. Alguns problemas particularmente interessantes ou apresentações particularmente boas são mostrados à classe completa e depois discutidos.

Resolução de problemas por grupos de discussão é muito popular e eu tenho a impressão de que os seminários, como um todo, são um sucesso. Os participantes são professores experientes e muitos deles sentem que a sua participação lhes dá ideias úteis para suas próprias aulas.

Referências

(1) *A arte de resolver problemas.* Interciência, Rio de Janeiro 1975.
(2) *Mathematks and Plausible Reasoning,* 2 vols. Princeton University Piess.
(3) No " *American Mathematical Monthly"',* vol. 65 (1958), p, 101-104, escrevi um pequeno artigo onde apresentei alguns dos pontos de vista aqui expressos.